# CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES
# MATHEMATIQUES APPLIQUEES

**Durée : 3 heures**

En ce qui concerne les **questions : V-2), VI-2), VII-3), orientées informatique**, on demande dans un premier temps des "**sous-programmes autonomes**", en langage PASCAL, dont la partie déclarative est proposée. L'utilisation de variables globales sera limitée aux cas indiqués. La structure de quelques variables est spécifiée par des déclarations **TYPE** données. Dans toute question on pourra supposer les résultats et les sous-programmes précédents utilisables. Un listing partiel est proposé.

---

Soit n un entier naturel, on note $R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que l'on rapporte à sa base canonique $\mathcal{C} = \{ X^i, i \in \mathbf{N}, 0 \leq i \leq n \}$, avec la convention $X^0 = 1$.

Soit $\mathcal{E}$ le plan (ou l'espace ) affine usuel. On rapporte $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À tout point M de $\mathcal{E}$ correspond un vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$ avec les conventions habituelles.

Soit $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé ( $a < b$ ). Soient P, Q, deux fonctions polynomiales associées à des polynômes de $R_n[X]$. À toute valeur $u \in I$ on associe le vecteur $\overrightarrow{OM}(u)\begin{pmatrix} x = P(u) \\ y = Q(u) \end{pmatrix}$. L'ensemble $\Gamma$ des points M(u) quand u décrit I sera appelé "**courbe polynomiale**".

Soit $U_n$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ qui au réel r associe le vecteur $U_n(r)$ de composantes : $\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ \dots \\ r^n \end{pmatrix}$

**Le but du sujet est de montrer (sur un exemple) qu'une "courbe polynomiale" peut être définie par des points appelés pôles qui permettent une interprétation graphique rapide. On demande de programmer quelques algorithmes. On propose ensuite d'approcher un demi cercle par une "courbe polynomiale".**

## I-NOTATION MATRICIELLE.

Dans cette partie I, on suppose n = 3.

**I-1-** Exemple : Soit la "courbe polynomiale" plane définie par : $\overrightarrow{OM}(u)\begin{pmatrix} x = 4 - 18u - 36u^2 - 16u^3 \\ y = \quad - 18u - 24u^2 - 8u^3 \end{pmatrix}$, $u \in [-1, -1/2]$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On peut noter $\overrightarrow{OM}(u)$ à l'aide d'un produit matriciel $\overrightarrow{OM}(u) = \mathbf{E}.\mathbf{U}(u)$. Donner la matrice **E**.

**I-2-** On peut toujours ramener le paramètre à un intervalle [0, 1] par le changement de variable : $u(t) = a + t\,.\,(b - a)$ ; $u(t) \in [a, b]$. Ce changement de variable correspond à un changement de base de $R_n[X]$. Donner pour l'exemple **I-1-)** $U_3(u(t))$ en fonction de $U_3(t)$ par une notation matricielle. Donner alors la nouvelle expression matricielle des coordonnées de M : $\overrightarrow{OM}(u(t)) = \mathbf{G}.\mathbf{U}_3(t)$. Préciser le calcul de **G**.

## II- BASE DE BERNSTEIN RELATIVE À $R_n[X]$.

Soit la famille $\mathcal{B} = \{ B_{i,n} ;\ i \in \mathbf{N},\ 0 \le i \le n \}$ d'éléments de $R_n[X]$ définie par :

$$C_n^i = \frac{n!}{i!.(n-i)!} \quad , \quad B_{i,n}(X) = C_n^i . X^i . (1-X)^{n-i}.$$

**II-1-** Montrer que cette famille $\mathcal{B}$ est génératrice, en déduire que c'est une base de $R_n[X]$. On pourra utiliser la relation triviale $X^k = X^k . [X + (1-X)]^{k'}$ pour tous les entiers naturels k et k'.

**II-2-** Dans le cas n = 3, donner les matrices permettant d'effectuer les changements de bases dans $R_n[X]$, de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, et de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$.

**II-3-** Exemple :

Soit B l'application de **R** dans $\mathbf{R}^{n+1}$ qui au réel x associe le vecteur B(x) de composantes : $\begin{pmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ B_{2,n}(x) \\ \cdots\cdots \\ B_{n,n}(x) \end{pmatrix}$

Si $\overrightarrow{OM}(t)$ définit une courbe polynomiale, on peut noter $\overrightarrow{OM}(t) = \mathbf{D}.\mathbf{B}(t)$. En prenant n = 3, donner la matrice **D** correspondant à la courbe plane définie par $\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x = 2 + 3t + 3t^2 - 2t^3 \\ y = 2 + 3t - t^3 \end{pmatrix}$ permettant de calculer les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ pour le paramètre $t \in [0, 1]$.

## III-PROPRIÉTÉS DE LA FAMILLE $\mathcal{B}$.

Montrer les propriétés ci-après. n naturel, $0 \le i \le n$, $t \in [0, 1]$.

**III-1-** $B_{i,n}(t) \ge 0$.

**III-2-** $\sum_{i=0}^{i=n} B_{i,n}(t) = 1$.

**III-3-** $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{i}{n} . B_{i,n}(t) = t$.

**III-4-** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$.

**III-5-** Pour tout n > 1, pour $1 \le i \le n-1$, pour $t \in [0, 1]$ :

$B_{n,n}(t) = t.B_{n-1,n-1}(t)$ , $B_{0,n}(t) = (1-t).B_{0,n-1}(t)$ , $B_{i,n}(t) = (1-t).B_{i,n-1}(t) + t.B_{i-1,n-1}(t)$.

**III-6-** Établir pour $n \ge 1$ les relations sur les dérivées :

$B'_{n,n}(t) = n.B_{n-1,n-1}(t)$ , $B'_{0,n}(t) = -n.B_{0,n-1}(t)$ , $B'_{i,n}(t) = n.\left[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right]$ $1 \le i \le n-1$.

## IV-DÉFINITION D'UNE "COURBE POLYNÔMIALE" PAR SES PÔLES.

Soient n+1 points $P_i$, que l'on nommera pôles, de $\mathcal{E}$ ($i \in \mathbf{N}$, $0 \le i \le n$), de coordonnées $(a_i, b_i)$.

**IV-1-** L'ensemble des points M quand t décrit [0,1] défini par :

$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \overrightarrow{OP_i} . B_{i,n}(t)$ est une "courbe polynômiale" $\Gamma$ que l'on peut noter sous forme matricielle

$\overrightarrow{OM}(t) = \mathbf{D}.\mathbf{B}(t)$ (c.f. II-3-). Quelle relation a-t-on entre **D** et les pôles ?

**IV-2-** Quelles sont les coordonnées des pôles de l'exemple traité au II-3) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ?

**IV-3-** L'ensemble des points $\overrightarrow{OM}(1-t)$ pour $t \in [0,1]$ est la même "courbe polynômiale", quels sont ses pôles.

**IV-4-** Donner en fonction des pôles le point $\overrightarrow{OM}(0)$. Les vecteurs dérivées première et seconde sont notés : $\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ et $\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$. Donner les vecteurs tangents pour $t = 0$. Montrer que le vecteur dérivée seconde en $t = 0$ est de même direction et même sens que $(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2})$.
En déduire les propriétés équivalentes au point $t = 1$.

**IV-5-** Une courbe polynômiale est située à l'intérieur d'un polygone défini par les pôles. Préciser celui-ci grâce à la propriété III-2-).

**VI-6-** Soit une transformation affine de $\mathcal{E}$ définie par : $\overrightarrow{OM_1} = A.\overrightarrow{OM} + \vec{V}$. Montrer que l'image de $\Gamma$ par cette transformation affine est une "courbe polynômiale" définie par des pôles $Q_i$ que l'on définira en fonction des $P_i$.

**IV-7-** Représenter graphiquement tous les résultats relatifs à l'exemple proposé, c'est-à-dire : les pôles, l'allure approchée de la courbe.

## V-CALCUL DES POINTS D'UNE "COURBE POLYNÔMIALE"

à partir des pôles : $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \overrightarrow{OP_i}.B_{i,n}(t)$, $t \in [0,1]$.

**V-1-** On pose : $P_i^{(0)} = \overrightarrow{OP_i}$, $0 \le i \le n$, puis : $P_i^{(j)} = t.P_{i+1}^{(j-1)} + (1-t).P_i^{(j-1)}$ pour $1 \le j \le n$ et $0 \le i \le n-j$.

Montrer par récurrence que : $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n-j} P_i^{(j)}.B_{i,n-j}(t)$ pour $0 \le j \le n$.

En déduire : $\overrightarrow{OM}(t) = P_0^{(n)}$.

**Indications pour la programmation** : le programme contient les déclarations suivantes :

```
TYPE  POINT = array [1..2] of real ;   {deux coordonnées d'un point }
      POLES = array [0..10,1..2] of real ;   {11 pôles maximum}
      N_DEGRE = integer ;   {le degré d'une "courbe", au plus 10}.
```

**V-2-** Écrire une procédure qui à un degré, à un tableau de pôles, à une valeur du paramètre associe les coordonnées du point M correspondant. On pourra déclarer cette procédure par l'ordre :
***PROCEDURE calcul (N : N_DEGRE ; P : POLES ; T : REAL ; Var M : POINT );***

## VI-TANGENTE À UNE "COURBE POLYNOMIALE" donnée par ses pôles.

**VI-1-** $\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ représente aussi une "courbe polynomiale" qui possède des pôles notés $Q_i$, pour i de 0 à n-1.
Donner ces pôles en fonctions de ceux de la courbe considérée.

**VI-2-** Écrire une procédure qui à une famille de pôles associe les pôles de $\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$. On pourra déclarer cette procédure par l'ordre :
***PROCEDURE derive (N : N_DEGRE; P : POLES; Var ND : N_DEGRE; Var PD : POLES );***

**VII- APPROXIMATION D'UN DEMI-CERCLE**, de centre O, de rayon 1, $y \geq 0$ par une "courbe polynomiale" symétrique par rapport à l'axe Oy, de degré inférieur ou égal à 4, passant par les points de coordonnées (1, 0) et (-1, 0), vérifiant en ces points une tangence verticale.

**VII-1-** Montrer en s'aidant d'un schéma qu'il reste deux paramètres à déterminer pour fixer les pôles.

**VII-2-** Déterminer ces pôles pour qu'aux points de paramètre 1/4,1/2, 3/4 la norme euclidienne de $\overrightarrow{OM}$ soit égale à 1.

**VII-3-** Pour cette courbe écrire un programme qui pour une valeur du paramètre de l'intervalle [0, 1] calcule les coordonnées du point correspondant ainsi que les vecteurs dérivées première et seconde.

**Indication pour la programmation** : Trois tableaux et trois entiers sont définis en variables globales :

**VAR COURBE , DERIV1 , DERIV2 : POLES;**
**VAR N , N1 , N2 : N_DEGRE;**

Ces variables définissent la courbe, les dérivées première et seconde et les divers degrés.

## ANNEXE : Listing partiel.

```
Program concours;
TYPE   POINT = array[1..2] of real ;
       POLES = array[0..10,1..2] of real;
       N_DEGRE = integer;
VAR    COURBE,DERIV1,DERIV2 : POLES;
       N , N1 , N2 : N_DEGRE;
(*************************************)
PROCEDURE calcul(N : N_DEGRE ; P : POLES ; T : REAL ; Var M: :POINT);
      { à faire }
(*************************************)
PROCEDURE derive (N : N_DEGRE ; P : POLES ; Var ND : N_DEGRE ; Var PD : POLES);
      { à faire }
(*************************************)
{ programme principal }
BEGIN
N:=4;
COURBE[0,1]:= 1;COURBE[1,1]:= 1.000;COURBE[2,1]:= 0.000;COURBE[3,1]:= -1.000;COURBE[4,1]:= -1;
COURBE[0,2]:= 0;COURBE[1,2]:= 0.873;COURBE[2,2]:= 1.503;COURBE[3,2]:= 0.873;COURBE[4,2]:= 0;
      { à faire }
END.
```